

ПРОГРЕВ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛА (сообщение первое)

Г. П. БОЙКОВ

Представлено профессором ФУКС Г. И.

Вопрос определения прогрева тел конечных размеров давно привлекал и привлекает внимание многих ученых. Последнее объясняется тем, что решение дифференциального уравнения теплопроводности вида

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

представляет большой принципиальный интерес, а умение рассчитывать прогрев тел конечных размеров является непосредственным требованием практики.

В настоящее время имеется ряд методов, которые, несмотря на определенные недостатки, указывают пути решения пространственной задачи и дают возможность находить температурное поле в том или ином приближении. Одним из таких методов является метод сеток или, что то же, метод численного интегрирования дифференциального уравнения теплопроводности [1]. Применение этого метода при довольно большом объеме числовых операций позволяет получить достаточно точные результаты подсчетов [2].

Теоретический интерес представляет решение дифференциального уравнения теплопроводности для трехмерного поля, полученное Н. Ю. Тайц [3], который дал его для параллелипипеда в форме:

$$\begin{aligned} t(x, y, z, \tau) = & \varphi(\tau) + \frac{1}{BSL} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2l-1}{2s} \pi x\right) \times \\ & \times \cos\left(\frac{2m-1}{2B} \pi y\right) \cdot \cos\left(\frac{2n-1}{2L} \pi z\right) \cdot \int_{-S}^{+S} \int_{-B}^{+B} \int_{-L}^{+L} [F(x, y, z) - \varphi(0)] \times \\ & \times \cos\left(\frac{2l-1}{2s} \pi x\right) \cdot \cos\left(\frac{2m-1}{2B} \pi y\right) \cdot \cos\left(\frac{2n-1}{2L} \pi z\right) dx \cdot dy \cdot dz \times \\ & \times e^{-\left[\left(\frac{2l-1}{2s}\right)^2 + \left(\frac{2m-1}{2B}\right)^2 + \left(\frac{2n-1}{2L}\right)^2\right] \pi^2 a \tau} \\ & - \frac{64}{\pi^3} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+m+n+1}}{(2l-1)(2m-1)(2n-1)} \cdot \cos\left(\frac{2l-1}{2s} \pi x\right) \times \end{aligned}$$

$$\times \cos\left(\frac{2m-1}{2B} \cdot \pi y\right) \cdot \cos\left(\frac{2n-1}{2L} \cdot \pi z\right) \cdot e^{-\left[\left(\frac{2l-1}{2S}\right)^2 + \left(\frac{2m-1}{2B}\right)^2 + \left(\frac{2n-1}{2L}\right)^2\right] \pi^2 a \tau} \times \\ \times \int_0^\tau e^{-\left[\left(\frac{2l-1}{2S}\right)^2 + \left(\frac{2m-1}{2B}\right)^2 + \left(\frac{2n-1}{2L}\right)^2\right] \pi^2 a \tau} \cdot \varphi'(\tau) \cdot d\tau.$$

Здесь $2s$; $2B$; $2L$ — стороны параллелепипеда; $\varphi(\tau)$ — закон изменения температуры на поверхности; $F(x, y, z)$ — начальное распределение температуры; l, m, n — характеристические числа. Приведенное решение представляет в общем виде температурное поле параллелепипеда в любой момент времени для граничных условий первого рода. Для получения значений температуры при пользовании этим соотношением необходимо знать закон $t_n = \varphi(\tau)$ и произвести ряд интегрирований, что может быть более или менее затруднительным в зависимости от вида функции $\varphi(\tau)$.

Следует заметить, что обоснованные решения для двух- и трехмерного нестационарного поля были предложены еще в 1919 году Вильямсоном и Адамс [4] для случая бесконечно большого коэффициента теплоотдачи. Позднее в 1932 году, для коротких цилиндров при граничных условиях третьего рода подобный вопрос был исследован Гольдштейном [5].

Оказывается, что короткие цилиндры, призмы прямоугольного сечения или параллелепипеды можно рассматривать, как тела, образованные взаимным пересечением перпендикулярных тел классической формы. Так, короткий цилиндр может быть образован взаимным перпендикулярным пересечением неограниченной пластины и бесконечного цилиндра. Параллелепипед — пересечением трех неограниченных пластин и т. п. Температурный критерий любой точки таких коротких тел может быть найден путем перемножения температурных критериев для соответствующих точек в телах бесконечного размера, пересечением которых образовано данное тело. Так, например, для параллелепипеда и короткого цилиндра температурный критерий может быть вычислен согласно выражений:

$$\Theta_{\text{паралл.}} = \Theta_{R_1} \cdot \Theta_{R_2} \cdot \Theta_{R_3} \quad (2)$$

$$\Theta_{\text{цил.}} = \Theta_r \cdot \Theta_R \quad (3)$$

где: Θ_{R_1} ; Θ_{R_2} ; Θ_{R_3} ; Θ_R — известные решения в критериях для неограниченных пластин толщиной $2R_1$; $2R_2$; $2R_3$; $2R$; Θ_r — известное решение для бесконечного цилиндра диаметром $2r$. Справедливость выражения (2) и (3) была подтверждена опытами Д. В. Будрина и Б. А. Красовского [6].

Если в соотношения (2) и (3) подставить вместо Θ их значения, то последние переписутся для случая нагрева в форме:

$$\frac{T_c - T(x, y, z, \tau)}{T_c - T_0} = \frac{T_c - T(x, \tau)}{T_c - T_0} \cdot \frac{T_c - T(y, \tau)}{T_c - T_0} \cdot \frac{T_c - T(z, \tau)}{T_c - T_0}, \quad (2')$$

$$\frac{T_c - T(r, z, \tau)}{T_c - T_0} = \frac{T_c - T(r, \tau)}{T_c - T_0} \cdot \frac{T_c - T(z, \tau)}{T_c - T_0}, \quad (3')$$

которая соответствует как граничным условиям первого, так и граничным условиям третьего рода [7]. Здесь $T(x, \tau)$, $T(y, \tau)$, $T(z, \tau)$, $T(r, \tau)$ — известные решения для тел классической формы [7]. Пользуясь соотношениями (2') и (3') можно найти температурное поле в параллелепипеде и коротком цилиндре для указанных граничных условий.

Одним из интересных методов определения температурного поля в ряде тел конечных размеров является метод А. И. Вейника [7]. А. И. Вейник предложил расчетные соотношения для таких тел в виде известных решений для граничных условий третьего рода, в структуру которых вводятся специальные коэффициенты, учитывающие сложность конфигурации исследуемого тела.

Для граничных условий второго рода при постоянном лучистом потоке расчетные соотношения были даны Иванцовым Г. П. [8] и Тайц Н. Ю. [9]. Способы расчета нагрева квадратного слитка были разработаны Семикиным [10] и Линчевским [11]. Теория решения задач двух- и трехмерного поля при граничных условиях первого рода изложена также в книге И. Снеддона [13].

II.

Анализируя методы решения пространственной задачи, можно прийти к следующему заключению:

1. Получить решение дифференциального уравнения теплопроводности для различных граничных условий представляет большие трудности.

2. Строгое решение задачи на основе имеющихся методов математической физики дает весьма сложный окончательный результат и требует знания ряда дополнительных факторов (например, закона изменения температуры на поверхности и т. п.).

3. Из различных условий прогрева тел при распространении тепла более, чем в одном измерении, наиболее слабо изучен вопрос, связанный с расчетом температурного поля при граничных условиях второго рода, выраженных законом Стефана-Больцмана.

Все это дает возможность высказать мнение о том, что не всегда целесообразно пытаться решать пространственную задачу чисто математически в таком виде, в каком она описывается дифференциальным уравнением (1). Правильнее в ряде случаев эту задачу решать технически, пытаясь каким-либо образом учесть влияние второго и третьего измерений. Поэтому мы решили отказаться от поисков чисто математического решения условия (1), а сочли возможным попытаться найти такое решение, которое, не отличаясь по сложности от одномерной задачи [12], могло бы дать распределение температуры в телах конечных размеров при нагреве их под действием лучистого тепла. При этом, в первую очередь, мы поставили своей целью определение лишь части температурного поля в теле, пока лишь того участка, который совпадает с линией стока тепла в теле. Под линией стока тепла в теле понимается направление от центра тела до той точки поверхности, температура которой остается наименьшей по поверхности на всем протяжении процесса нагрева.

Сущность предлагаемой методики расчета состоит в том, что составляющая расхождения градиента температуры вдоль линии стока тепла определяется как частное от деления расхождения градиента температуры на некоторый постоянный коэффициент, т. е. имеется в виду существование зависимости

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\text{div}(\text{grad} \cdot T)}{\xi} \quad (4)$$

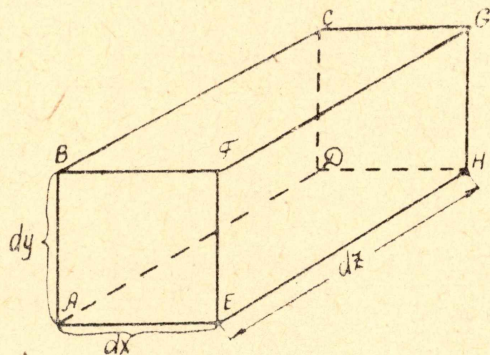
Тогда расхождение градиента температуры в формуле (1) может быть заменено по форме

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \xi \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5)$$

и исходное дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \xi a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} . \quad (6)$$

В том, что выражения (4), (5), (6) существуют, можно убедиться из рассмотрения прохода тепла через элементарный объем $dV = dx dy dz$ за дифференциал времени $d\tau$.



Фиг. 1.

Согласно закону Фурье, количество тепла, проходящее за время $d\tau$ в направлении оси x через грань $ABCD$ (фиг. 1), равно

$$Q'_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau , \quad (7)$$

а через грань $EFGH$, имеющую температуру $T + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx$, за то же время равно

$$Q''_x = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau . \quad (8)$$

Тогда изменение тепла в объеме, в связи с переносом тепла вдоль оси x , будет

$$Q_x = Q'_x - Q''_x \quad (a)$$

аналогично

$$Q_y = Q'_y - Q''_y \quad (б)$$

$$Q_z = Q'_z - Q''_z \quad (с)$$

Общее изменение количества тепла в элементе объема $dx \cdot dy \cdot dz$ за период $d\tau$ равно сумме выражения (а), (б), (с), а именно:

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z,$$

или, что то же,

$$c\gamma \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau = dQ_x \cdot \left(1 + \frac{dQ_y}{dQ_x} + \frac{dQ_z}{dQ_x} \right) .$$

Так как перенос тепла рассматривается за дифференциал времени $d\tau$, то

$$\frac{dQ_y}{dQ_x} = \beta = \text{const} ; \quad \frac{dQ_z}{dQ_x} = \gamma = \text{const} .$$

Тогда

$$c\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau = dQ_x (1 + \beta + \gamma) = dQ_x \cdot \xi .$$

Согласно (7) и (8):

$$dQ_x = Q'_x - Q''_x = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau,$$

откуда

$$c\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau} = \xi \cdot \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

или, что то же:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \xi \cdot a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

т. е. получено выражение (6).

III

Решая уравнение (6) для граничных условий, выраженных законом Стефана-Больцмана, получим распределение температуры вдоль линии стока тепла x , но с учетом распространения тепла так же и по другим измерениям (методику решения см. [12]).

Последнее для случая неизменных теплофизических характеристик имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{T_m(x)}{T_c} = \frac{T_0}{T_c} + \frac{g_c \cdot R_1}{\lambda \cdot T_c} & \left\{ \xi \cdot \frac{a\tau_1}{R_1^2} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{ci}}{g_c} - \frac{g_{cm}}{g_c} \cdot \frac{R_1^2 - 3x^2}{6R_1^2} + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \cos\left(\mu_n \cdot \frac{x}{R_1}\right) \cdot \left[\frac{g_{c1}}{g_c} \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \xi \cdot \frac{a\tau_1}{R_1^2}} - \right. \\ & \left. \left. - \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{g_{ci} - g_{c(i+1)}}{g_c} \cdot e^{-(m-i)\mu_n^2 \cdot \xi \cdot \frac{a\tau_1}{R_1^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь ось x совпадает с линией стока тепла в теле и изменяется от 0 до R_1 [$2R_1$ — наименьшее измерение параллелепипеда].

Интегрируя выражение (9) от 0 до R_1 , получим среднее значение температуры вдоль линии стока тепла в теле

$$\frac{T_m^{cp}}{T_c} = \frac{T_0}{T_c} + \frac{g_c \cdot R_1}{\lambda \cdot T_c} \cdot \xi \cdot \frac{a\tau_1}{R_1^2} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{ci}}{g_c}. \quad (10)$$

При этом расчетный интервал времени определяется из аналитико-эмпирических соотношений

$$\tau_1 = \frac{0,03 \cdot \lambda \cdot T_c \cdot R_1}{g_c \cdot \xi \cdot a} \quad (11)$$

$$\varphi_m < \frac{(\xi+2) \cdot (g_{c1} - g_{c2})}{g_{c1} \left[\xi+2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 \cdot \xi \cdot \frac{a\tau_1}{R_1^2}} \right]}. \quad (12)$$

При $\xi=1$ (11) и (12) переходят в соответствующие аналитические выражения для неограниченной пластины [12].

Выражения, аналогичные (9) :- (12) для случая, когда теплофизические характеристики вещества меняются в функции от температуры, могут быть представлены в виде (9') :- (12').

$$\begin{aligned} \frac{T_m(x)}{T_c} = \frac{T_0}{T_c} + \frac{g_c \cdot R_1}{\lambda_1 \cdot T_c} \left\{ \xi \frac{a_1 \tau_1}{R_1^2} \cdot \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{ci}}{g_c} \cdot \frac{c_1}{c_i} - \frac{g_{cm}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_m} \cdot \frac{R_1^2 - 3x^2}{6R_1^2} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2} \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{R_1}\right) \cdot \left[\frac{g_{c1}}{g_c} \cdot e^{-\mu_n^2 \xi} \cdot \sum_{i=1}^{i=m} \frac{a_i \tau_1}{R_1^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{i=1}^{i=m-1} \left(\frac{g_{ci}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_i} - \frac{g_{c(i+1)}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_{(i+1)}} \right) \cdot e^{-\mu_n^2 \xi} \cdot \sum_{k=1}^{k=m-i} \frac{a_{(i+k)} \tau_1}{R_1^2} \right] \right\}. \quad (9') \end{aligned}$$

$$\frac{T_m^{cp}}{T_c} = \frac{T_0}{T_c} + \frac{g_c \cdot R_1}{\lambda_1 \cdot T_c} \cdot \xi \cdot \frac{a_1 \tau_1}{R_1^2} \cdot \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{ci}}{g_c} \cdot \frac{c_1}{c_i} \quad (10')$$

$$\tau_1 = \frac{0,03 \cdot \lambda_1 \cdot T_c \cdot R_1}{g_c \cdot \xi \cdot a_1} \quad (11')$$

$$\varphi_m < 1 - \frac{a_2}{a_1} \cdot \left\{ 1 - \frac{(\xi+2) \left(g_{c1} - g_{c2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)}{g_{c1} \left[\xi + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 \cdot \xi} \cdot \frac{a_1 \tau_1}{R_1^2} \right]} \right\}^* \quad (12')$$

Таким образом, используя выражения (9) :- (12) при известном коэффициенте ξ можно найти распределение температуры вдоль линии стока тепла в параллелепипеде. Приближенное значение величины ξ можно найти из следующих рассуждений.

В настоящее время решен вопрос о прогреве параллелепипеда при граничных условиях первого и третьего рода. Следует заметить, что решение задачи для параллелепипеда, данное в виде произведения соответствующих температурных критериев (формула (2'), математически доказано [7] и подтверждено опытами [6]. Согласно формуле (2')

$$T(x, y, z, \tau) = T_c - \frac{[T_c - T(x, \tau)] [T_c - T(y, \tau)] [T_c - T(z, \tau)]}{(T_c - T_0)^2}, \quad (15)$$

где $T(\varphi, \tau)$, решения для неограниченных пластин, известны для граничных условий первого и третьего рода [7]. Эти решения для удобства можно представить в следующей сокращенной записи.

$$T(x, \tau) = T_c - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) \cdot \cos\left(\mu_n \cdot \frac{x}{R_1}\right) \quad (a)$$

$$T(y, \tau) = T_c - \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) \cdot \cos\left(\mu_m \cdot \frac{y}{R_2}\right) \quad (б)$$

$$T(z, \tau) = T_c - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\tau) \cdot \cos\left(\mu_k \cdot \frac{z}{R_3}\right) \quad (в)$$

* См. [12].

При этом для граничных условий 1-го и 3-го рода величины $f_n(\tau)$ и μ_n ; $f_m(\tau)$ и μ_m ; $f_k(\tau)$ и μ_k будут различны.

Дифференцируя дважды выражение (15) по x , получим:

$$\frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} = + \frac{\frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} [T_c - T(y, \tau)] \cdot [T_c - T(z, \tau)]}{(T_c - T_0)^2}$$

Взяв далее вторую производную от выражения (15) по y , будем иметь:

$$\frac{\partial^2 T(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} = + \frac{[T_c - T(x, \tau)] \cdot \frac{\partial^2 T(y, \tau)}{\partial y^2} \cdot [T_c - T(z, \tau)]}{(T_c - T_0)^2}$$

Тогда:

$$\frac{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} = \frac{[T_c - T(x, \tau)] \cdot \frac{\partial^2 T(y, \tau)}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} \cdot [T_c - T(y, \tau)]}$$

Учитывая выражения (а), (б), (в), последнее соотношение представим так:

$$\frac{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{R_1}\right) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) \cdot \cos\left(\mu_m \frac{y}{R_2}\right) \cdot \frac{\mu_m^2}{R_2^2}}{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) \cdot \cos\left(\mu_n \frac{x}{R_1}\right) \cdot \frac{\mu_n^2}{R_1^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) \cdot \cos\left(\mu_m \frac{y}{R_2}\right)}$$

Для удобства записи это соотношение перепишем в следующем виде:

$$\frac{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{\mu_m^2}{R_2^2}}{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\mu_n^2}{R_1^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} B_m} = \beta$$

Раскрывая ряды, получим:

$$\beta = \frac{(A_{1n} + A_{2n} + \dots) (B_{1m} \cdot \mu_{1m}^2 + B_{2m} \mu_{2m}^2 + \dots) R_1^2}{(A_{1n} \cdot \mu_{1n}^2 + A_{2n} \cdot \mu_{2n}^2 \dots) (B_{1m} + B_{2m} + \dots) R_2^2}$$

Произведя деление по правилу деления многочлена на многочлен, будем иметь:

$$\frac{B_{1m} \cdot \mu_{1m}^2 + B_{2m} \mu_{2m}^2 + \dots}{B_{1m} + B_{2m} + \dots} \simeq \mu_{1m}^2$$

Аналогично:

$$\frac{A_{1n} + A_{2n} + \dots}{A_{1n} \mu_{1n}^2 + A_{2n} \mu_{2n}^2 + \dots} \simeq \frac{1}{\mu_{1n}^2};$$

Тогда

$$\beta = \frac{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \simeq \frac{\mu_{1m}^2 \cdot R_1^2}{\mu_{1n}^2 \cdot R_2^2} \quad (16)$$

Точно таким же путем находим:

$$\gamma = \frac{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \simeq \frac{\mu_{1k}^2 \cdot R_1^2}{\mu_{1n}^2 \cdot R_3^2}. \quad (17)$$

Таким образом, для граничных условий первого и третьего рода существуют совершенно одинаковые по форме зависимости (16) и (17). Это позволяет полагать, что и для граничных условий, выраженных законом Стефана-Больцмана, эти соотношения должны иметь место. С другой стороны, для граничных условий первого и второго рода характеристические числа не зависят от параметров, характеризующих процесс, и соответственно равны:

$$\mu_n = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\mu_n = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Поэтому для граничных условий первого и второго рода соотношения (16) и (17) примут вид:

$$\frac{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \simeq \frac{R_1^2}{R_2^2}; \quad \frac{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \simeq \frac{R_1^2}{R_3^2} \quad (18)$$

Пользуясь соотношением (18), расхождение градиента температуры можно заменить по схеме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= \left(1 + \frac{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} + \frac{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \\ &= (1 + \beta + \gamma) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \simeq \left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} + \frac{R_1^2}{R_3^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\xi \simeq 1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} + \frac{R_1^2}{R_3^2} \quad (19)$$

Последнее выражение, являясь приближенным количественным соотношением коэффициента ξ , хорошо раскрывает качественную его сторону. Оно показывает, что искомый коэффициент определяется отношением квадратов измерений тела. Практические расчеты, проведенные для граничных условий типа второго рода, подтверждали правильность структурной формы выражения (19), однако при условии, что под R_2^2 и R_3^2 понимаются средние значения размеров тела, вычисленные из соотношений:

$$R_{2cp}^2 = \frac{R_2^2 + R_{2diag}^2}{2} = \frac{R_2^2 + R_2^2 + R_1^2}{2} = R_2^2 + 0,5R_1^2$$

$$R_{3cp}^2 = \frac{R_3^2 + R_{3diag}^2}{2} = \frac{R_3^2 + R_3^2 + R_1^2}{2} = R_3^2 + 0,5R_1^2$$

Тогда для параллелепипеда формула коэффициента ξ принимает вид:

$$\xi = 1 + \frac{R_1^2}{R_2^2 + 0,5 R_1^2} + \frac{R_1^2}{R_3^2 + 0,5 R_1^2} \quad (20)$$

Из формулы (20) может быть получено значение данного коэффициента для длинного бруса прямоугольного или квадратного сечения, куба, неограниченной пластины. Соответствующие формулы приведены в таблице 1.

Таблица 1

№№ п. п.	Соотношение измерений	Значение ξ	Расчет по выражениям (9)–(12) дает ...
1	$R_1 < R_2 < R_3 < \infty$	$\xi = 1 + \frac{R_1^2}{R_2^2 + 0,5 R_1^2} + \frac{R_1^2}{R_3^2 + 0,5 R_1^2}$	Температурное поле в параллелепипеде.
2	$R_1 < R_2 < \infty$ $R_3 = \infty$	$\xi = 1 + \frac{R_1^2}{R_2^2 + 0,5 R_1^2}$	Температурное поле в бруске прямоугольного сечения.
3	$R_1 = R_2 = R_3$	$\xi = 2,332$	Температурное поле в кубе.
4	$R_1 = R_2; R_3 = \infty$	$\xi = 1,666$	Температурное поле в бруске квадратного сечения.
5	$R_1 < R_2 = R_3 = \infty$	$\xi = 1$	Температурное поле в неограниченной пластине.
6	$R_2 < R_1$ или $R_3 < R_1$	При данном обозначении измерений ξ не имеет смысла.	Линия стока тепла не совпадает с R_1 .

Проверка путем подстановки в уравнения, описывающие процесс, выражений (9) и (9') показала, что они удовлетворяют дифференциальному уравнению теплопроводности (6) и соответствующим условиям однозначности.

На фиг. 2 показан прогрев стального параллелепипеда со сторонами $0,2 \times 0,4 \times 0,6$ м. Кривая 1 (изменение температуры поверхности) и кривая 2 (центра) построены по формуле (9). Кривые 1' и 2' построены для тех же условий методом перемножения температурных критериев при $\alpha_{изл} = 225$ ккал/м²час град.

IV

Дифференциальное уравнение (6) для короткого цилиндра можно представить в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \xi \cdot a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \dots \quad (21)$$

$$0 \leq r \leq R_1 < R_2; \quad -R_2 \leq z \leq R_2,$$

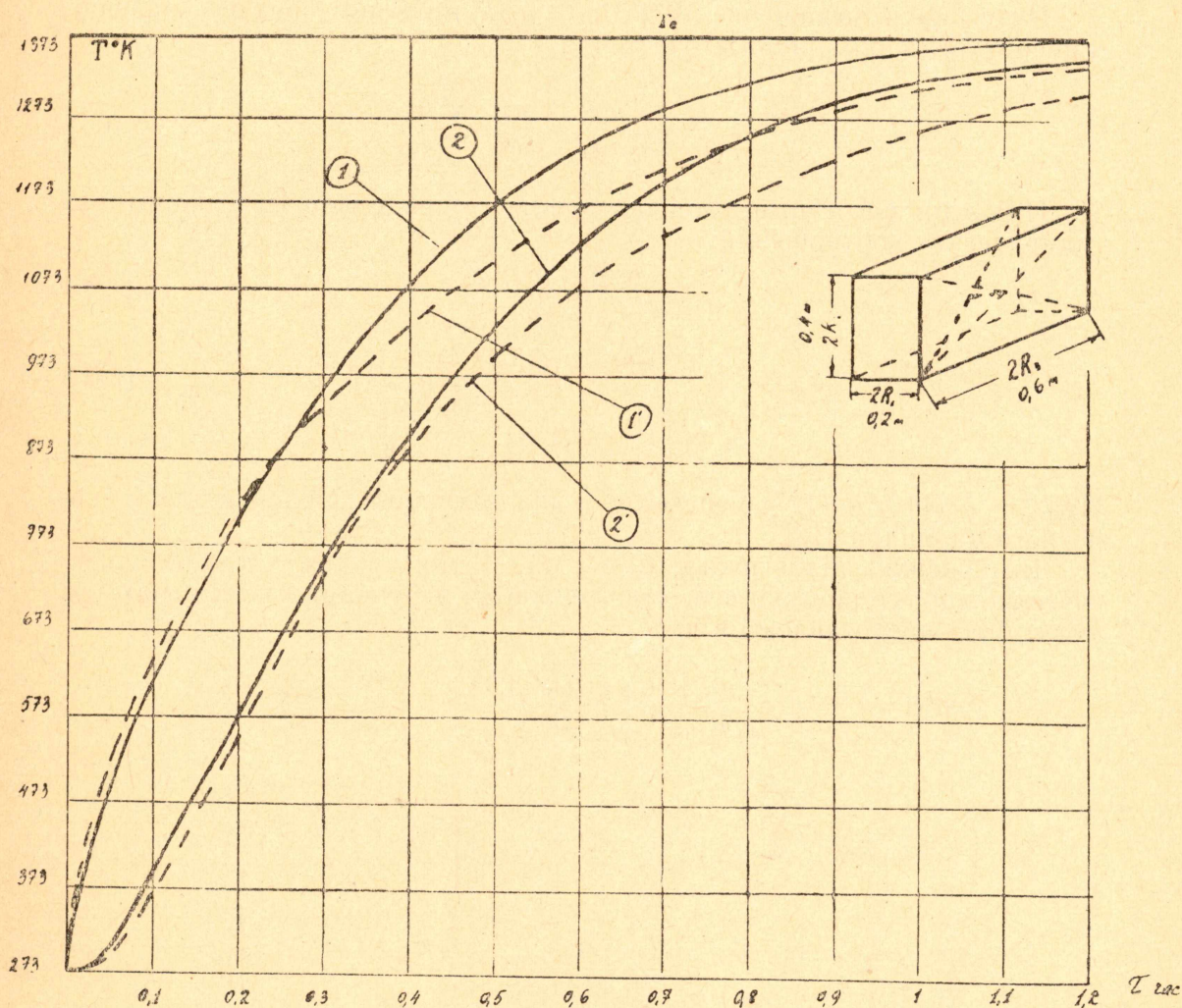
где $2R_2$ — длина цилиндра.

Рекомендуемая формула для определения коэффициента ξ приведена в таблице 2.

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям для параллелепипеда, получим распределение температуры вдоль линии стока тепла r ,

Таблица 2

№№ п. п.	Соотношение измерений	Значение ξ	Примечание
1	$R_1 < R_2 < \infty$	$\xi = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2 + 0,5R_1^2}$	Температурное поле в коротком цилиндре вдоль R_1 .
2	$R_1 = R_2$	$\xi = 1,333$	Температурное поле в коротком цилиндре вдоль R_1 .
3	$R_1 < R_2 = \infty$	$\xi = 1$	Температурное поле в неограниченном цилиндре.
	$R_2 < R_1$	Коэффициент ξ теряет смысл.	Линия стока тепла не совпадает с R_1 .



Фиг. 2. Прогрев стального параллелепипеда размером $0,2 \times 0,4 \times 0,6 \text{ м}^3$ при $\lambda = 30 \text{ ккал/м час. град.}$ $a = 0,03 \text{ м}^2/\text{час.}$ $C_{\text{изл}} = 4 \text{ ккал/м}^2\text{час. } ^{\circ}\text{K}^4$.
 ————— Расчетные данные изменения температуры поверхности и центра параллелепипеда, полученные по формуле (9)
 - - - - - То же по методу перемножения температурных критериев при $\alpha_{\text{изл}} = 200 \text{ ккал/м}^2\text{час. град.}$

с учетом распространения тепла и вдоль оси z . Последнее для случая неизменных теплофизических характеристик имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{T_m(r)}{T_c} = & \frac{T_0}{T_c} + \frac{g_c R}{\lambda T_c} \left\{ 2\xi \frac{a\tau_1}{R_1^2} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{ci}}{g_c} - \frac{1}{4} \frac{g_{cm}}{g_c} \left(1 - 2 \frac{r^2}{R_1^2} \right) - \right. \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 \cdot J_0(\mu_n)} \cdot J_0\left(\mu_n \frac{r}{R_1}\right) \cdot \left[\frac{g_{c1}}{g_c} e^{-\mu_n^2 \cdot m \xi \frac{a\tau_1}{R_1^2}} - \right. \\ & \left. \left. - \sum_{i=1}^{i=m-1} \left(\frac{g_{ci}}{g_c} - \frac{g_{c(i+1)}}{g_c} \right) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot (m-i) \xi \cdot \frac{a\tau_1}{R_1^2}} \right] \right\}^* \quad (9'') \end{aligned}$$

Здесь r совпадает с линией стока тепла в теле и изменяется от 0 до R_1 ($2R_1$ — диаметр цилиндра).

Интегрируя выражение (9'') от 0 до R_1 получим среднее значение температуры вдоль линии стока тепла:

$$\frac{T_m^{cp}}{T_c} = \frac{T_0}{T_c} + 2 \frac{g_c R_1}{\lambda T_c} \cdot \xi \frac{a\tau_1}{R_1^2} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{ci}}{g_c} \quad (10'')$$

При этом расчетный интервал времени определяется из аналитико-эмпирических соотношений:

$$\tau_1 = \frac{0,0225 \cdot \lambda \cdot T_c \cdot R_1}{g_c \xi \cdot a} \quad (11'')$$

$$\varphi_m \leq \frac{(1 + \xi + 2) \cdot (g_{c1} - g_{c2})}{g_{c1} \left[\xi + 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 \cdot \xi \cdot \frac{a\tau_1}{R_1^2}} \right]} \quad (12'')$$

При $\xi = 1$ (11'') и (12'') переходят в аналогичное выражение для бесконечного цилиндра [12].

Выражения, аналогичные (9'') — (12'') для случая, когда теплофизические характеристики вещества меняются в функции от температуры, могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{T_m(r)}{T_c} = & \frac{T_0}{T_c} + \frac{g_c \cdot R_1}{\lambda_1 \cdot T_c} \left\{ 2\xi \frac{a_1 \tau_1}{R_1^2} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{ci}}{g_c} \cdot \frac{c_i}{c_i} - \frac{1}{4} \cdot \frac{g_{cm}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_m} \cdot \right. \\ & \cdot \left(1 - 2 \frac{r^2}{R_1^2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} \cdot J_0\left(\mu_n \frac{r}{R_1}\right) \left[\frac{g_{c1}}{g_c} \cdot e^{-\mu_n^2 \xi \sum_{i=1}^{i=m} \frac{a_i \tau_1}{R_1^2}} - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^{i=m-1} \left(\frac{g_{ci}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_i} - \frac{g_{c(i+1)}}{g_c} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_{(i+1)}} \right) \cdot e^{-\mu_n^2 \xi \sum_{k=1}^{k=m-i} \frac{a_{(i+k)} \tau_1}{R_1^2}} \right] \right\}^* \quad (9''') \end{aligned}$$

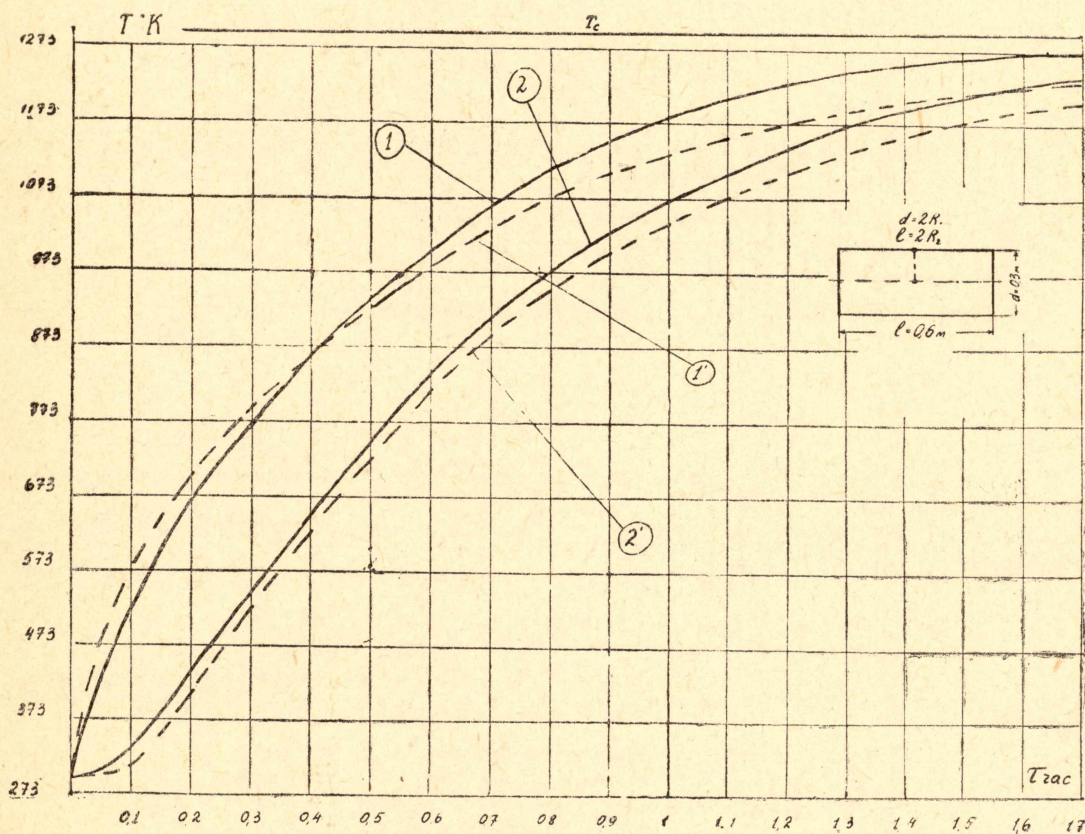
$$\frac{T_m^{cp}}{T_c} = \frac{T_0}{T_c} + 2 \frac{g_c R_1}{\lambda_1 \cdot T_c} \cdot \xi \cdot \frac{a_1 \tau_1}{R_1^2} \cdot \sum_{i=1}^{i=m} \frac{g_{ci}}{g_c} \cdot \frac{c_i}{c_i} \quad (10''')$$

* См. также [12].

$$\tau_1 = \frac{0,0225 \cdot \lambda_1 \cdot T_c \cdot R_1}{g_c \cdot \xi \cdot a_1} \quad (11''')$$

$$\varphi_m \leq 1 - \frac{a_2}{a_1} \left\{ 1 - \frac{(\xi + 1 + 2) \left(g_{c1} - g_{c2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)}{g_{c1} \left[\xi + 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 \frac{a_1 \tau_1 \cdot \xi}{R_1^2}} \right]} \right\} \quad (12''')$$

На фиг. 3 показан прогрев стального цилиндра диаметром $d = 0,3$ м и длиной $l = 0,6$. Кривая 1 (изменение температуры поверхности) и кривая 2 (центра) построены по формуле (9''). Кривые 1' и 2' построены для тех же условий методом перемножения температурных критериев при $\alpha_{изл} = 200$ ккал/м²час град.



Фиг. 3. Прогрев стального цилиндра $d = 0,3$ м, $l = 0,6$ м при $\lambda = 30$ ккал/м час град.
 $a = 0,0225$ м²/час; $C_{изл} = 3,65$ ккал/м² час °К⁴.

— Расчетные данные изменения температуры поверхности и центра цилиндра, полученные по формуле (9'')

— — — тоже по методу перемножения температурных критериев при $\alpha_{изл} = 200$ ккал/м² час. град.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Распределение температурного поля вдоль линии стока тепла в теле, при распространении последнего более чем в одном измерении, может быть представлено выражением, не отличающимся по сложности от одномерной задачи (см. [12]).

2. Расчетные соотношения (9) — (12) могут быть рекомендованы как приближенные формулы для определения температурного поля вдоль линии стока тепла в параллелепипеде и коротком цилиндре при прогреве их по закону лучеиспускания.

Основные обозначения

T_c — температура источника тепла, °К,

T_0 — начальная температура тела, °К,

g_c — поток лучистого тепла от источника в пустоту, $\frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \text{ час}}$

g_{ci} — лучистый поток тепла на поверхности тела в итый момент времени, определяемый из соотношения,

$$g_{ci} = \varepsilon_n \cdot C_0 \left[\left(\frac{T_c}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{i-1}}{100} \right)^4 \right]$$

$T_m^{(x)}$ — распределение температуры вдоль линии стока тепла в теле в m -ный момент времени,

R_1 — половина наименьшего измерения тела, м,

τ_1 — расчетный интервал времени, час,

φ_m — погрешность расчета,

α, λ, c — теплофизические характеристики вещества тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Ю. Панов. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
2. В. Н. Соколов.— Расчет нагрева тел методом сеток, ЦНИИМАШ (Нагрев крупных слитков), ГИТИМЛ, М., 1954.
3. Н. Ю. Тайц.— Теоретические основы нагрева металла (диссертация), 1940, Днепропетровск.
4. Williamson a. Adams,— «Physic Rev.», (2), 14, 99, 1919.
5. Goldschtein,— «Zeitschrift f. Angew. Math. u. Mech», 1932, Nr. 4.
6. Д. В. Будрин, Красовский Б. Л.,— Нагрев и охлаждение тел различной формы, Труды Уральского индустриального института им. С. М. Кирова, вып. XVII, ГНТИЛ, С.—М., 1941.
7. А. В. Лыков,— Теория теплопроводности, ГИТТЛ, М., 1952.
8. Г. П. Иванцов,— Нагрев металла, М., 1948, Metallurgizdat.
9. Н. Ю. Тайц,— Технология нагрева стали, Metallurgizdat, М., 1950.
10. И. Семикин,— «Сталь», 1937, № 12, 1939, № 4—5.
11. Линчевский,— «Металлург», 1938, № 9.
12. Г. П. Бойков,— Прогрев тел под действием лучистого тепла [Изв. ТПИ, том 89, 1957], Томск, 1955.
13. И. Снеддон,— Преобразование Фурье, ИИЛ, М., 1955.